TD numéro 4

Exercice 1. Soit $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux sur un espace topologique X.

Montrer que $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ est injective pour tout ouvert U de X si et seulement si $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ est injective pour tout $P \in X$.

Remarque : La partie "si" de l'énoncé n'est plus vraie si l'on remplace injectif par surjectif.

Exercice 2. Soient $\mathcal{B}$ une base d'ouverts sur un espace topologique X et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des faisceaux sur X.

On suppose que pour tout $U \in \mathcal{B}$ il existe un morphisme $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ qui est compatible avec les restrictions.

1. Préciser ce que signifie "compatible avec les restrictions" dans l'énoncé.
2. Montrer que ceci s'étend de manière unique en un morphisme de faisceaux $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.
3. Montrer que si $\alpha(U)$ est surjective (resp. injective) pour tout $U \in \mathcal{B}$, alors α est surjective (resp. injective).

Exercice 3. Soient X un espace topologique, P un point de X, et A un groupe abélien. On définit un préfaisceau $i_P(A)$ sur X : $i_P(A)(U) = A$ si $P \in U$ et $i_P(A)(U) = 0$, si $P \notin U$.

1. Vérifier que $i_P(A)$ est bien un faisceau.
2. Montrer que la tige $i_P(A)_Q = A$ si Q appartient à l'adhérence $\overline{\{P\}}$ de P et 0 sinon.
3. Montrer que $i_P(A)$ est isomorphe à $i_*(A_{\overline{\{P\}}})$, où $A_{\overline{\{P\}}}$ est le faisceau constant de valeur A sur $\overline{\{P\}}$ et $i : \overline{\{P\}} \hookrightarrow X$ est l'inclusion.

Exercice 4. Soient X un espace topologique, Z un sous-espace fermé, $U = X \setminus Z$ l'ouvert complémentaire de Z dans X et $i : Z \hookrightarrow X$, $j : U \hookrightarrow X$ les inclusions.

1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur Z, montrer que la tige de l'image directe $(i_*\mathcal{F})_P$ est $\mathcal{F}_P$, si P appartient à Z, et 0 sinon. On appelle le faisceau $i_*\mathcal{F}$ *l'extension de $\mathcal{F}$ par zéro en dehors de Z.*
2. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur U. Soit $j_!\mathcal{F}$ le faisceau sur X associé au préfaisceau défini par : $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ si $V \subset U$ et $V \mapsto 0$ sinon. Montrer que la tige $(j_!\mathcal{F})_P$ est $\mathcal{F}_P$ si P appartient à U et 0 sinon. Montrer que $j_!\mathcal{F}$ est l'unique faisceau sur X ayant cette propriété et dont la restriction à U est $\mathcal{F}$. On appelle le faisceau $j_!\mathcal{F}$ ainsi défini *l'extension de $\mathcal{F}$ par zéro en dehors de U.*
3. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Montrer qu'il existe une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0.$$

Exercice 5. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X. On fixe des faisceaux $\mathcal{F}_i$ sur chaque U_i et des isomorphismes $\varphi_{i,j} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ vérifiant $\varphi_{i,i} = \mathrm{Id}$ et $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Montrer qu'il existe un faisceau $\mathcal{F}$ sur X et des isomorphismes $\psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \to \mathcal{F}_i$ tel que $\psi_j = \varphi_{i,j} \circ \psi_i$

sur $U_i \cap U_j$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est unique à unique isomorphisme près et est appelé le *recollement des* $\mathcal{F}_i$ *via les isomorphismes* $\varphi_{i,j}$.

Exercice 6. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $\mathcal{H}$ un faisceau sur Z. Montrer que

$$f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H}) = (g \circ f)^{-1}\mathcal{H}, \quad g_*(f_*\mathcal{F}) = (g \circ f)_*\mathcal{F}.$$

Exercice 7. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y.

1. Montrer qu'il existe des morphismes canoniques de faisceaux :

$$\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}, \quad f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

2. Montrer que, si f est une immersion fermée, le premier morphisme est surjectif.
3. Montrer que, si f est une immersion ouverte, le second morphisme est un isomorphisme.
4. Montrer qu'il existe une bijection canonique

$$\mathrm{Mor}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Mor}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}).$$